

割圓連比例術圖解

割圓連比例術圖解三卷爲方立遺書之一方立生五
歲曉九九數年十八與同里張彥惟共治算學盡通諸
家法又十年居京師識秀水朱筠麓時出所得相質學
益進逾年迺成是書又二年復成橢圓求周術一卷斜
弧三邊求角補術一卷堆垛求積術一卷余故不通算
術而筠麓彥惟二君皆專門學也二君於是書推許甚
至爰以冠羣書之首其後成三術亦並以次附焉道光
三年冬十月三日基誠序

割圖連比例術圖解序

董方立
遺書一

元郭守敬授時草用天元術求弧矢徑一圍三猶仍舊
率西人以六宗三要二簡術求八線理密數繁凡遇布
算皆資於表梅文穆公赤水遺珍載西士杜德美圍徑
求周諸術語焉不詳罕通其故嘗欲更創通法使弦矢
與弧可以徑求覃精累年迄無所得己卯春秀水朱先
生鴻以杜氏九術全本相示蓋海甯張先生彘冠所寫
者九術以外別無圖說聞陳氏際新嘗爲之注爲某氏
所祕書已不傳迺反覆尋繹究其立法之原蓋卽圍容
十八觚之術引伸類長求其繁積實兼差分之列衰商
功之堆垛而會通以盡句股之變周髀經曰圍出於方

方出於矩矩出於九九八十一圍弧也方弦矢也九九
八十一遞加遞減遞乘遞除之差也方圍者天地之大
體奇耦相生出於自然今得此術而方圍之率通矣爰
分圖著解冠以九術原文並立弦矢互求四術都爲三
卷辭取易明有傷蕪冗其所未寤俟有道正焉嘉慶二
十四年夏四月陽湖董祐誠

割圓連比例術圖解卷上

董方立
遺書一

陽湖董祐誠

第一術

圓徑求周

術曰以徑三乘之爲第一數次置第一數四除之又二
除之三除之爲第二數次置第二數九乘之四除之又
四除之五除之爲第三數次置第三數二十五乘之四
除之又六除之七除之爲第四數次置第四數四十九
乘之四除之又八除之九除之爲第五數次置第五數
八十一乘之四除之又十除之十一除之爲第六數若
以千萬爲圓徑則求至第十一數并之得三千一百四

十一萬五千九百二十六卽圓周

第二術

通弧求通弦

術曰以通弧爲第一數寄左次以半徑爲連比例第一率通弧爲第二率二率自乘一率除之得第三率次置第一數以三率乘之一率除之得第四率四除之又二除之三除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第六率四除之又四除之五除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第八率四除之又六除之七除之爲第四數應減寄右第一數第三數相并第二數第四數相并左右相減

所餘卽通弦

第三術

通弧求矢

術曰以半徑爲連比例第一率通弧爲第二率二率自乘一率除之得第三率四除之又二除之爲第一數寄左次置第一數以三率乘之一率除之得第五率四除之又三除之四除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第七率四除之又五除之六除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第九率四除之又七除之八除之爲第四數應減寄右第一數第三數相并第二數第四數相并左

右相減所餘卽矢

第四術

弧背求正弦

術曰以弧背爲第一數寄左次以半徑爲連比例第一率弧背爲第二率二率自乘一率除之得第三率次置第一數以三率乘之一率除之得第四率二除之三除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第六率四除之五除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第八率六除之七除之爲第四數應減寄右第一數第三數相并第二數第四數相并左右相減所餘卽正弦

第五術

弧背求正矢

術曰以半徑爲連比例第一率弧背爲第二率二率自乘一率除之得第三率二除之爲第一數寄左次置第一數以三率乘之一率除之得第五率三除之四除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第七率五除之六除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第九率七除之八除之爲第四數應減寄右第一數第三數相并第二數第四數相并左右相減所餘卽正矢

第六術

通弦求通弧

術曰以通弦爲第一數次以半徑爲連比例第一率通
弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率次置第一
數以三率乘之一率除之得第四率四除之又二除之
三除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之
得第六率九乘之四除之又四除之五除之爲第三數
次置第三數以三率乘之一率除之得第八率二十五
乘之四除之又六除之七除之爲第四數次置第四數
以三率乘之一率除之得第十率四十九乘之四除之
又八除之九除之爲第五數以諸數相并卽通弧

第七術

矢求通弧

術曰以矢八乘之爲第一數次以半徑爲連比例第一率八乘矢爲第三率三率自乘一率除之得第五率四除之又三除之四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第七率四乘之四除之又五除之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第九率九乘之四除之又七除之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十一率十六乘之四除之又九除之十除之爲第五數以諸數相并又爲連比例第三率以與第一率半徑相乘開平方得第二率卽通弧

第八術

正弦求弧背

術曰以正弦爲第一數次以半徑爲連比例第一率正
弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率次置第一
數以三率乘之一率除之得第四率二除之三除之爲
第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第六率
九乘之四除之五除之爲第三數次置第三數以三率
乘之一率除之得第八率二十五乘之六除之七除之
爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十
率四十九乘之八除之九除之爲第五數以諸數相并
卽弧背

第九術

正矢求弧背

術曰以正矢倍之爲第一數次以半徑爲連比例第一率倍正矢爲第三率三率自乘一率除之得第五率三除之四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第七率四乘之五除之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第九率九乘之七除之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十一率十六乘之九除之十除之爲第五數以諸數相并又爲連比例第三率以與一率半徑相乘開平方得第二率卽弧背

杜

弧線表

設圓半徑爲一千兆

一度	一七四五三二九二五一九九四三
二度	三四九〇六五八五〇三九八八六
三度	五二三五九八七七五五九八二九
四度	六九八一三一七〇〇七九九七七三
五度	八七二六六四六二五九九七一六
六度	一〇四七一九七五五一一九六五九
七度	一二二一七三〇四七六三九六〇三
八度	一三九六二六三四〇一五九五四六
九度	一五七〇七九六三二六七七九四八九

一。度

一七四五三二九二五一九九四三二

九。度

一五七。七九六三二六七七九四八九六

一分

二九。八八八二。八六六五

二分

五八一七七六四一七三三一

三分

八七二六六四六二五九九七

四分

一一六三五五二八三四六六二

五分

一四五四四四一。四三三二二八

六分

一七四五三二九二五一九九九四

七分

二。三六二一七四六。六六。

八分

二三二七一。五六六九三二五

九分

二六一七九九三八七七九九一

一。分

二九〇。八八八二。八六六五七

一秒

四八四八一三六八一

二秒

九六九六二七三六二二

三秒

一四五四四四一〇四三三

四秒

一九三九二五四七二四四

五秒

二四二四〇六八四〇五五

六秒

二九〇八八八二〇八六六

七秒

三三三九三六九五七六七七

八秒

三八七八五〇九四四八八

九秒

四三六三三二二二九九

一〇秒

四八四八一三六八一〇

半周

三一四一五九二六五三五八九七九三

全周

六二八三一八五三〇七一七九五八六

按今八線表半徑一十萬則小餘有七位凡數皆至單位止然必更加小餘數位則得數方密除得數首位未至單位以下者依遞加諸率以次求之如所用二率過大則乘除之數愈繁別立簡法以御之通弧求弦通弧過半徑以上者三歸之如法求得通弦三乘之寄左復以通弦爲連比例二率二率自乘再乘一率半徑自乘除之得四率與左相減卽原所求通弦通弧求矢通弧過半徑以上者二歸之如法求得矢四乘之寄左復以矢爲三率三率自乘一率

半徑除之得五率倍之與左相減卽原所求矢如過全徑以上者三歸之如法求得矢九乘之寄左復以矢倍之爲三率三率自乘一率半徑除之得五率三乘之與左相減復以三率乘五率一率半徑除之得七率折半與左相加卽原所求矢弧背求正弦正矢弧背過四十五度者則以減象限如法求得正矢以減半徑爲正弦如法求得正弦以減半徑爲正矢通弦求弧視通弦過半徑以上而在半徑十之十七以下者求得矢倍之半徑乘之開方得通弦如通弦術求得通弧倍之爲所求通弧如在十之十七以上者通弦自乘以減全徑自乘開方得通弦如通弦術求

得通弧以減半周爲所求通弧矢求通弧八乘矢過半徑以上者半徑乘倍矢開方得通弦如通弦術求得通弧倍之爲所求通弧正弦求弧背正弦自乘數在半徑自乘數半以上者求得餘弦如正弦法求弧背以減象限得原所求弧背正矢求弧背倍矢過半徑以上者求得餘矢如正矢法求弧背以減象限得原所求弧背仁和范景福有借弧求正餘弦法以半徑一千萬爲一率借四十五度正弦卽餘弦七〇七一〇六八爲二率四十五度弧與本弧相減餘爲較弧如法求其弦矢弦與矢相加減本弧小於借弧求正弦則加求餘弦則減大於借弧求正弦則減求餘

弦則加爲三率得四率以與借弧之弦相加減本弧
小於借弧求正弦則減求餘弦則加大於借弧求正
弦則加求餘弦則減卽得本弧正餘弦有借弦求弧
法正弦過半徑十分之三至十分之六借三十度正
弦五〇〇〇〇〇〇餘弦八六六〇二五四用之過
半徑十分之六至十分之八借四十五度正餘弦用
之過半徑十分之八至十分之九借六十度正弦八
六六〇二五四餘弦五〇〇〇〇〇〇用之先以本
弧正弦求得本弧餘弦次以本弧正餘弦與借弧正
餘弦各相減得正弦較爲股餘弦較爲句各自乘相
并開方得弦爲較弧通弦如法求得通弧卽較弧與

借弧相加減本弧正弦大於借弧正弦則加小則減
得本弧蓋卽二簡法中相加相減之術也

附以弦求弦以矢求矢術

有通弦求通弧加倍幾分之通弦

凡弦之倍分皆取奇數

術曰置弧分自乘減一爲第一乘數復置自乘數減九
爲第二乘數復置自乘數減二十五爲第三乘數依次
列之迺置弧分乘通弦本數爲第一數寄左次以半徑
爲連比例第一率通弦本數爲第二率二率自乘一率
除之得第三率以第一數乘之一率除之得第四率第
一乘數乘之四除之又二除之三除之爲第二數寄右
次置第二數以三率乘之一率除之得第六率第二乘

數乘之四除之又四除之五除之爲第三數寄左次置
第三數以三率乘之一率除之得第八率第三乘數乘
之四除之又六除之七除之爲第四數寄右第一數與
第三數相并第二數與第四數相并左右相減卽所求
通弦單位以下棄之未至單位者依次求之雖未至單
位如減數適足弧分自乘數而無乘數者卽以前所得
數并減之不復遞求

如三倍弧則無第三數
五倍弧則無第五數

有矢求通弧加倍幾分之矢

凡矢之倍分
奇耦通用

術曰置弧分自乘四倍之減四爲第一乘數復置四倍
自乘數減十六爲第二乘數復置四倍自乘數減三十
六爲第三乘數依次列之迺置弧分自乘數乘矢本數

爲第一數寄左次以半徑爲連比例第一率矢本數二
乘之爲第三率以第一數乘之一率除之得第五率第
一乘數乘之四除之又三除之爲第二數寄右
次置第二數以三率乘之一率除之得第七率第二乘
數乘之四除之又五除之六除之爲第三數寄左次置
第三數以三率乘之一率除之得第九率第三乘數乘
之四除之又七除之八除之爲第四數寄右第一數與
第三數相并第二數與第四數相并左右相減卽所求
矢單位以下棄之未至單位者依次求之雖未至單位
如減數適足四倍弧分自乘數而無乘數者卽以前所
得數并減之不復遞求

如二倍弧則無第三數
三倍弧則無第四數

有通弦求幾分通弧之一通弦

此亦取奇數

術曰置弧分自乘減一爲第一乘數復置自乘數九乘之減一爲第二乘數復置自乘數二十五乘之減一爲第三乘數依次列之迺置通弦本數以弧分除之爲第一數次以半徑爲連比例第一率弧分除通弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率二率乘之一率除之得第四率第一乘數乘之四除之又二除之三除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第六率第二乘數乘之四除之又四除之五除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第八率第三乘數乘之四除之又六除之七除之爲第四數以諸數相并

卽所求通弦單位以下棄之未至單位者依次求之

有矢求幾分通弧之一矢

此亦奇
耦通用

術曰置弧分自乘四倍之減四爲第一乘數復置四倍
自乘數四乘之減四爲第二乘數復置四倍自乘數九
乘之減四爲第三乘數依次列之迺置弧分自乘數除
矢本數爲第一數次以半徑爲連比例第一率弧分自
乘數除矢本數又二乘之爲第三率以第一數乘之一
率除之得第五率第一乘數乘之四除之又三除之四
除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得
第七率第二乘數乘之四除之又五除之六除之爲第
三數次置第三數以三率乘之一率除之得第九率第

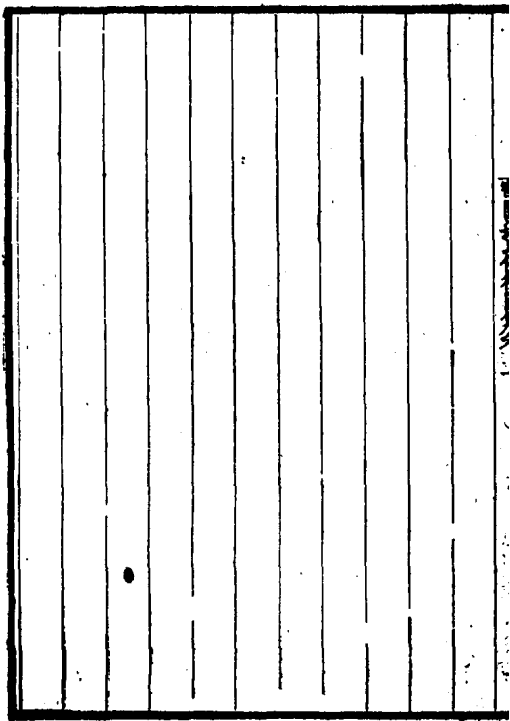
三乘數乘之四除之又七除之八除之爲第四數以諸數相并卽所求矢單位以下棄之未至單位者依次求之

右四術爲立法之原杜氏九術由此推行而歸於簡易蓋弧與弦矢相求皆弧與一分之弦合故卽以弧數爲弧之分數則一分之數極微減差亦極微可以不計而其所用之三率已藏一自乘數故不更求乘數今所立弦矢相求術則弧不與弦合

析分愈少則弧弦差愈多

必當如減差以求乘數而三率內不復更藏自乘數方爲密合又以正弦求正弦則如通弦術而每數內各省一四除正矢求正矢則矢數弧分並同故不復

省四除法雖小異而理實相同也遞求之次愈多則得數愈密故單位下仍宜加小餘數位蓋畸零索積尾數易差耳舊法求弦矢以立八線表取數紆迴五分之弦則用中比例後更增求三分之一通弦術用益實歸除汪氏萊更補求五分之一通弦術商除進退皆難遞定今立此術任求幾分之弦矢法皆一貫惟通弦在半徑以上矢及正弦在半徑二之一以上者當求得半弧之弦矢求之數大者又半之故以六十度之弦矢順次遞求一象限內之弦矢悉得其乘除之數並有定程無煩詳審句股割圓之術蓋愈精而愈簡矣

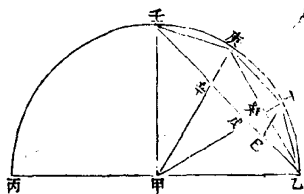


割圓連比例術圖解卷中

董方立
遺書一

陽湖董祐誠

三分弧弦起算圖



如圖甲乙爲半徑

甲丁甲庚
甲壬並同

乙丁弧爲一分

丁庚庚壬
弧並同

乙庚弧爲二分乙壬弧爲三分乙丁爲一分通弦

丁庚
庚壬

同

乙壬爲三分通弦丁癸爲二分矢丁戊爲二分倍矢

丁甲乙角對乙丁弧爲兩等邊形

等邊必等角甲丁與
甲乙等則乙丁甲角

與丁乙
甲角等

丁乙戊角爲界角與丁甲乙角等

凡界角皆得
心角之倍度

丁乙戊三角形與丁甲乙三角形同用丁角而丁乙戊

角又同丁甲乙角則丁戊乙角亦必同丁乙甲角又從

丁與庚甲徑線平行作丁己線則己丁戊角必同丁甲

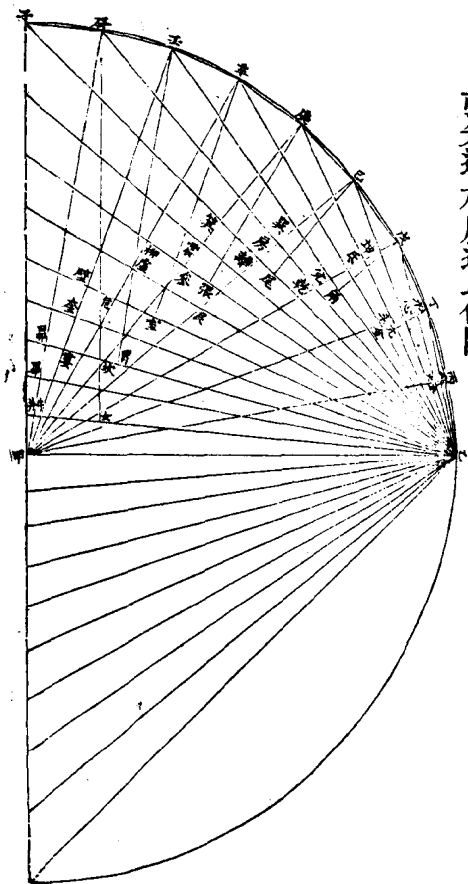
庚角亦即同乙甲丁角及丁乙戊角而戊丁己三角形

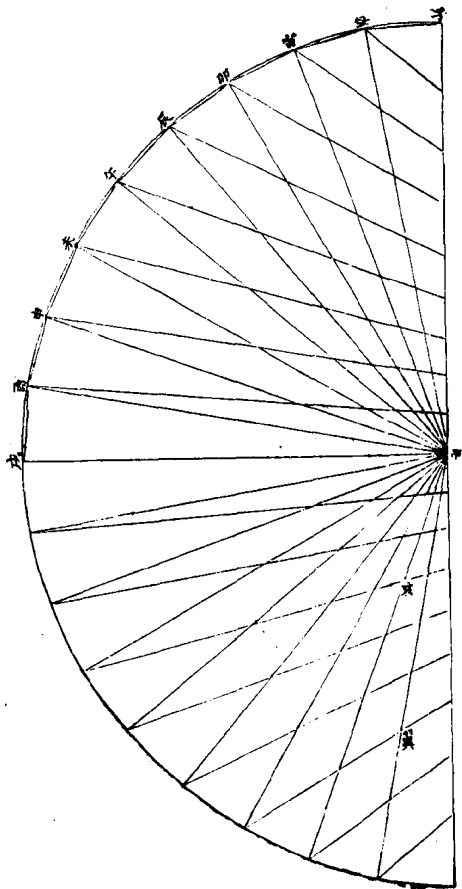
與丁乙戊三角形同用丁戊乙角則丁己戊角亦必與

乙丁戊角等此三三角形皆同式故甲乙與乙丁之比

同於乙丁與丁戊之比而乙丁與丁戊之比又同於丁
戊與戊己之比則甲乙半徑爲連比例一率乙丁爲二
率丁戊爲三率卽爲二分之倍矢戊己爲四率并乙戊
與乙丁等己辛與丁庚等辛壬與庚壬等爲一分通弦之三倍卽三二
率而乙壬三分之通弦卽爲三倍二率少一己戊四率
此卽割圓法求圍容十八邊形之理自三分以下比例
皆出乎此

弦矢遞加連比例圖





割圓連比例術圖解卷中

三董方立遺書

如圖舉十七分以上爲例甲乙爲半徑乙丙弧爲一分其弦丙乙乙丁弧爲二分其矢丙土其倍矢丙火乙戊弧爲三分其弦戊乙乙己弧爲四分其矢丁心其倍矢丁金乙庚弧爲五分其弦庚乙乙辛弧爲六分其矢戊氏其倍矢戊乾乙壬弧爲七分其弦壬乙乙癸弧爲八分其矢己房其倍矢己艮乙子弧爲九分其弦子乙乙丑弧爲十分其矢庚震其倍矢庚坎乙寅弧爲十一分其弦寅乙乙卯弧爲十二分其矢辛虛其倍矢辛甲乙辰弧爲十三分其弦辰乙乙午弧爲十四分其矢壬奎其倍矢壬亥乙未弧爲十五分其弦未乙乙申弧爲十六分其矢癸畢其倍矢癸翼乙酉弧爲十七分其弦酉

乙如以甲乙半徑爲連比例第一率則丙乙爲二率爲

一分之弦丙乙二率自乘甲乙一率除之得丙火三率

爲二分之倍矢解同前圖半之得丙土三率二之一爲二分

之矢丙乙火角爲兩等邊形乙土爲其中垂線故丙土得丙火之半丙乙二率乘丙火

三率甲乙一率除之得火木四率解同前圖以減水木二率

水木同丁丙即同丙乙得水火二率一少四率一以加倍乙火二

率乙火同丙乙亦同戊水倍乙火即同乙火并戊水得戊乙二率三少四率一

爲三分之弦減戊水二率得水乙二率二少四率一丙

乙二率乘之甲乙一率除之水乙斗三角形與乙甲丙三角形同式得水

斗三率二少五率一凡二率自乘一率除之爲三率二率三率相乘一率除之爲四率二

率四率相乘一率除之爲五率半之得水心三率一少

位遞降而數不變下可遞推

五率二之一

水乙斗三角爲兩等邊三角形乙心爲其中垂線故水心得水斗之半與上丙乙火

三角形及下坤乙兌巽乙離箕乙參柳乙危壁乙婁昂乙牛諸三角形並同

加丁水三率一

丁木同丙火

得丁心三率二少五率二之一爲四分之矢若

置丁水三率一倍之得三率二

金斗同丁水倍丁水即如丁水并金斗加

水斗三率二少五率一得丁金三率四少五率一爲四

分之倍矢減金斗三率一得丁斗三率三少五率一丙

乙二率乘之甲乙一率除之

丁亢與戊坤平行則斗丁亢角同戊甲丁角亦即同

丙甲乙角爲同式三角形與上火丙木三角形及下兌

戊角離己尾參庚張危辛室婁壬胃牛癸女諸三角形

並得斗亢四率三少六率一以減坤亢二率坤亢同丙

乙與上水木線及下巽角箕尾得坤斗二率一少四率

三多六率一

凡相減無對則多少互變

加倍乙斗二率四少四率三

乙斗同乙水亦同庚坤倍
乙斗卽如乙斗并庚坤
得庚乙二率五少四率五多

六率一爲五分之弦減庚坤二率二少四率一得乙坤

二率三少四率四多六率一丙乙二率乘之甲乙一率

除之得坤兌三率三少五率四多七率一半之得坤氏

三率一又二之一少五率二多七率二之一加戊坤三

率三少五率一
戊坤同
丁斗得戊氏三率四又二之一少五

率三多七率二之一爲六分之矢如置戊坤三率三少

五率一倍之得三率六少五率二
乾兌同戊坤倍戊坤
卽如戊坤并乾兌

加坤兌三率三少五率四多七率一得戊乾三率九少

五率六多七率一爲六分之倍矢減乾兌三率三少五

率一得戊兌三率六少五率五多七率一丙乙二率乘

之甲乙一率除之得兌角四率六少六率五多八率一

以減巽角二率得巽兌二率一少四率六多六率五少

八率一加倍乙兌二率六少四率八多六率二

乙兌同
乙坤卽

同壬巽倍乙兌卽
如乙兌并壬巽得壬乙二率七少四率十四多六率

七少八率一爲七分之弦依次相求得己房三率八少

五率十多七率四少九率二之一爲八分之矢己艮三

率十六少五率二十多七率八少九率一爲八分之倍

矢子乙二率九少四率三十多六率二十七少八率九

多十率一爲九分之弦庚震三率十二又二之一少五

率二十五多七率十七又二之一少九率五多十一率

二之一爲十分之矢庚坎三率二十五少五率五十多

七率三十五少九率十多十一率一爲十分之倍矢寅
乙二率十一少四率五十五多六率七十七少八率四
十四多十率十一少十二率一爲十一分之弦辛虛三
率十八少五率五十二又二之一多七率五十六少九
率二十七多十一率六少十三率二之一爲十二分之
矢辛甲三率三十六少五率一百有五多七率一百十
二少九率五十四多十一率十二少十三率一爲十二
分之倍矢辰乙二率十三少四率九十一多六率一百
八十二少八率二百五十六多十率六十五少十二率
十三多十四率一爲十三分之弦壬奎三率二十四又
二之一少五率九十八多七率一百四十七少九率一

百有五多十一率三十八又二之一少十三率七多十
五率二之一爲十四分之矢壬亥三率四十九少五率
一百九十六多七率二百九十四少九率二百一十多
十一率七十七少十三率十四多十五率一爲十四分
之倍矢未乙二率十五少四率一百四十多六率三百
七十八少八率四百五十多十率二百七十五少十二
率九十多十四率十五少十六率一爲十五分之弦癸
畢三率三十二少五率一百六十八多七率三百三十
六少九率三百三十多十一率一百七十六少十三率
五十二多十五率八少十七率二之一爲十六分之矢
癸翼三率六十四少五率三百三十六多七率六百七

十二少九率六百六十多十一率三百五十二少十三
率一百有四多十五率十六少十七率一爲十六分之
倍矢酉乙二率十七少四率二百有四多六率七百十
四少八率一千一百二十二多十率九百三十五少十
二率四百四十二多十四率一百十九少十六率十七
多十八率一爲十七分之弦如是至億萬分則弦與弧
合而求弧如求弦亦用弧如用弦一弧之數卽衆弦之
合數矣在弧則弦常得奇數一分三分五分矢常得耦數二分四率
二分四分六分在連比例諸率則弦常得耦數二率四率
分至億萬分故弧弦相求皆用耦率六率至億
萬率矢常得奇數三率五率七故弧弦相求皆用耦率六率至億
率矢相求皆用奇率也弦之二率常與弧分等一分則弦
爲一二率一

三分則弦
爲二率三

故弧求弦以弧爲二率弦求弧以弦爲二率

弧求矢以弧爲二率而求三率爲矢矢求弧以三率求

二率而爲弧也首率常爲多以下皆多少相間

弦則二率幾少

四率幾多六率幾少八率幾少則三率幾少五率幾多七率幾少九率幾以下多少號常相間

故弧求

弦矢所得數奇數常加

第一第三第五諸數相并恆加

耦數常減

第六諸數相并恆減

亦以次相間至弦矢求弧則弦矢必少於弧

故四率五率在彼爲減者在此爲加諸率相乘一率除

之率皆遞降多少號之數既常相間則首位恆多而次

位恆少當求次位以相加然乘除降位後則以次位爲

首位固變爲多而次位復爲少如是遞降少數恆大多

數恆小故有加而無減也

在弦則爲幾二率少幾四率又少幾六率又少幾八率以

次遞降在矢則爲幾三率少幾五率又少遞加諸率在

幾七率又少幾九率亦以次遞降數見下

遞加諸率在

弧求弦矢則以弧分加一得最末率

三分加一爲四則

弦末位爲四率四

分加一爲五則矢末位爲五率在弦矢求弧則三分以下已無盡數然

析圍至億萬分設數雖大而數十率以後已不成分秒

故自單位以下直棄其餘不復入算既得諸率以堆塚

術御之則序次秩然而弦則有二率本數即可求二率

以下諸率之兼數有二率與諸率之兼數亦可求二率

本數矢則有二率以求三率即可求三率以下諸率之

兼數有三率以下諸率之兼數亦可求三率以得二率

本數二率既常與弧分等則有弧可求弦矢有弦矢亦可求弧故弦則自一分至億萬分矢則自二分至億萬

分數雖不同皆起於二率之一遞加遞積以成諸率則以堆垛術馭之無不同者割圖連比例之法所由立也
弦矢連比例諸率成遞加數圖

一	二	三	四	五	六	七	八
一率	二率	三率	四率	五率	六率	七率	八率
半徑二率	水火二率	半徑二率	坤斗二率	巽兌二率	半徑二率	箕醜二率	半徑二率
一	一	二	三	四	五	六	七
丙火三率	斗乙二率	水斗三率	兌乙二率	坤兌三率	離乙二率	巽醜三率	半徑三率
三率加	二率倍	三率倍	四率加	三率倍	四率加	三率倍	四率加
一	一	一	一	一	一	一	一
水火四率	丁水三率	戊坤三率	坤斗四率	己巽三率	巽兌四率	庚箕三率	箕醜四率
四率加	三率倍	四率加	三率倍	四率加	三率倍	四率加	三率倍
一	一	一	一	一	一	一	一
斗乙四率	水斗五率	兌乙四率	坤兌五率	離乙四率	巽醜五率	箕醜五率	半徑五率
五率加	四率倍	五率加	四率倍	五率加	四率倍	五率加	四率倍
一	一	一	一	一	一	一	一
戊坤五率	坤斗六率	己巽五率	巽兌六率	庚箕五率	箕醜六率	辛柳五率	柳參六率
六率加	五率倍	六率加	五率倍	六率加	五率倍	六率加	五率倍
一	一	一	一	一	一	一	一
兌乙六率	坤兌七率	離乙六率	巽醜七率	箕醜七率	半徑七率	箕醜七率	半徑七率
七率加	六率倍	七率加	六率倍	七率加	六率倍	七率加	六率倍
一	一	一	一	一	一	一	一
半徑七率	箕醜八率	半徑八率	箕醜九率	半徑九率	箕醜十率	半徑十率	箕醜十一率
八率加	七率倍	八率加	七率倍	八率加	七率倍	八率加	七率倍
一	一	一	一	一	一	一	一
半徑十一率	箕醜十二率	半徑十二率	箕醜十三率	半徑十三率	箕醜十四率	半徑十四率	箕醜十五率
九率加	八率倍	九率加	八率倍	九率加	八率倍	九率加	八率倍
一	一	一	一	一	一	一	一
半徑十五率	箕醜十六率	半徑十六率	箕醜十七率	半徑十七率	箕醜十八率	半徑十八率	箕醜十九率
十率加	九率倍	十率加	九率倍	十率加	九率倍	十率加	九率倍

遞加根遞加數遞加數相并遞數三次相并遞數三次相并遞數與相并

半徑

弦中一分

弦右端同左端

倍矢中一分

弦中一分

弦右端同左端

倍矢中一分

弦中一分

弦右端同左端

如圖舉六率以上為例第一列皆為一遞加數之根數

也一二三四五遞加數皆遞加一第二列一二三四諸數遞加數也第

三列一三六諸數遞加數相并之數也一仍為一

三又加三為六第四列一四十二諸數遞加數二次

六又加四為十相并之數也一仍為一又加十為二十

第五列一五十五三十五諸數遞加數三次相并之數也一仍為一

加四為五又加十為十五又加十五為三十第六列一六二十一五十

六諸數遞加數四次相并之數也一仍為一又加五

二十一為二十一又加以此遞加至數十百次相并皆起

於一而以次漸增如前圖弧分起一乙則二率亦起一

乙自二率一遞求諸線弧分增一分則連比例增一率

一分之弦有二率二分之矢有三率
三分之弦有四率四分之矢有五率
率數亦以一遞加

遞積凡弦皆以中一分加左右兩端得弦矢皆以中一

分加上下兩端得倍矢加左端戊水再加中一分火水

得戊乙爲三分之弦四分則倍丁水即如上端丁水加

下端斗金再加中一分水斗得丁金爲四分之倍矢

而倍矢之中一分出於弦右端丙火出於火乙弦之中

一分出於矢上端坤斗出於丁斗故數常蟬聯半徑一

率常爲一弦中一分之二率亦常爲一如遞加根數火水

坤斗巽兌箕離左右一端之二率爲一二三四如遞加

二率皆爲一數火乙乙二率一斗乙乙二率二倍矢中一分之三率同火丙

三率一水斗三率二坤
兌三率三巽離三率四
倍矢上下一端之三率爲一三

六十如遞加相并數
丁水三率一戊坤三率二
己巽三率六庚箕三率十弦左右

一端之四率同
火木四率一斗九四率三
兌角四率六離尾四率十率數遞降而

遞加相并數亦遞增而二率起一分三率起二分四率

起三分五率起四分皆遞差一位弦矢中一分與兩端

之一既並如遞加相并數則卽以遞加相并數按層斜

列之倍下一列數加上一列數卽可按次而得弦矢諸

率夫遞加相并諸數卽三角堆諸數也故又以三角堆

之術變之

弦矢連比例諸率成三角堆圖

- 一率
- 二率
- 三率
- 四率
- 五率
- 六率
- 七率
- 八率

四五六上圖遞加之數卽三角堆每層遞加之根數

堆一層則根爲一二層則根爲二諸形悉同

亦卽平三角堆每層之數也

平三角

角堆第一層爲一第二層爲二第三層爲三

第三列爲一三六十五二十

一上圖遞加一次相并之數卽平三角堆之積

平三角堆根一

者爲積一根二者并一層一二層二爲積三根三者并一層一二層二三層三爲積六

亦卽立三

角堆每層之數也

立三角堆第一層爲一第二層爲二第三層爲三

第四列爲

一四十二三十五上圖遞加二次相并之數卽立三

角堆之積

立三角堆根一者爲積一根二者并一層一二層三爲積四根三者并一層一二層三三

積十

亦卽三乘三角堆每層之數也

三乘三角堆第一層爲一第二

層爲四第三層爲十

第五列爲一五十五三十五七十五上圖遞加

三次相并之數卽三乘三角堆之積

三乘三角堆根一者爲積一根二者

并一層一二層三四層五積五根三者并亦卽四乘三角堆

每層之數也四乘三角堆第一層爲一第以此遞推至

數十百乘三角堆積皆以次漸增而其根常相等如根

則平三角堆積三立三角堆積四三乘三角堆積五四

乘三角堆積六五乘三角堆積七六乘三角堆積八根

爲三則平三角堆積六立三角堆積十三乘三角堆積

十五四乘三角堆積二十一五乘三角堆積二十八六

乘三角堆積三十六如前圖以倍遞加數加一數爲弦之二率在

此則爲倍第二列平三角堆每層數加第一列三角堆

根遞加差數而三角堆根遞加差數卽平三角堆每層

數之差是依次兩平三角堆每層數相加卽得二率前一

空位無加仍得一爲一分弧之二率一二相加得三上

爲三分弧之二率二三相加得五爲五分弧之二率

圖以倍遞加一次相并數加遞加數爲矢之三率在此

則爲倍第三列平三角堆積加第二列平三角堆每層

數而平三角堆每層數卽平三角堆積之差是依次兩

平三角堆積相加卽得三率一前空位無加仍得一爲二分弧之三率一三相加

得四爲四分弧之三率三六相加得九爲六分弧之三率以此遞推則依次兩立三

角堆積相加卽得四率一前空位無加仍得一爲三分弧之四率一四相加得五爲五分

分弧之四率四十相加得十四爲七分弧之四率依次兩三乘三角堆積相加

卽得五率一前空位無加仍得一爲四分弧之五率五十五相加得二十爲八分弧之五率依次兩四乘三角堆積相加卽得六率前一

分弧之五率依次兩五乘三角堆積相加卽得七率一前空位無加仍得一爲五分弧之六率一六相加得七爲七分弧之六率六二十一相加得二十七爲九分弧之

六率依次兩五乘三角堆積相加卽得七率一前空位無

六分弧之七率一七相加得八爲八分弧之七率依次兩

六率七二十八相加得三十五爲十分弧之七率

六乘三角堆積相加卽得八率

一前空位無加仍得一
七分弧之八率一八

相加得九爲九分弧之八率八三十六
相加得四十四爲十一分弧之八率

凡率數進一則

三角堆積方數亦進一而求弦矢各率者皆可以三角堆求積術御之矣

凡求三角堆積皆以根數

根數卽
層數

與根數加一相乘爲

帶縱平方積二除之得平三角堆積以根數與根數加一相乘加二再乘爲帶縱立方積二除之三除之得立三角堆積以根數與根數加一相乘加二再乘加三三乘爲帶縱三乘方積二除之三除之四除之得三乘三角堆積以根數與根數加一相乘加二再乘加三三乘加四四乘爲帶縱四乘方積二除之三除之四除之五

除之得四乘三角堆積乘方數進一位則乘數皆增一

除數亦增一此堆垛術之定法也

舊法至求立三角堆而止三乘方以下見

汪萊衡齋算學

據此術以求弦矢諸率當置弧分折半

起於二

分如平三角堆根數之爲一者則四分根爲二六分根爲三凡三角堆根數皆遞加以一而弧分皆遞加以二

矢起於弧之二分而平三角堆根亦起於弧之二分故當折半爲平三角堆之根以根

與根加一相乘得數又以根減一與根相乘得數兩數

相并故以實相并而并除

爲兩帶縱平方積二除之爲

兩平三角堆積適得三率置弧分減一折半

四率一起於三分如

立三角堆根數之爲一者則五分根爲二七分根爲三凡三角堆根數皆遞加以一而弧分皆遞加以二弦起於弧之一分而立三角堆根則爲立三角堆之根以根起於弧之三分故當減一折半

與根加一相乘與根加二再乘得數又以根減一與根

相乘與根加一再乘得數兩數相并爲兩帶縱立方積

二除之三除之爲兩立三角堆積迺得四率置弧分減

二折半五率一起於四分如三乘三角堆積數之爲一者則六分根爲二八分根爲三矢起於弧之二

分而三乘三角堆根則起於弧之四分故當減二折半爲三乘三角堆之根以根

與根加一相乘與根加二再乘與根加三三乘得數又

以根減一與根相乘與根加一再乘與根加二三乘得

數兩數相并爲兩帶縱三乘方積二除之三除之四除

之爲兩三乘三角堆積迺得五率置弧分減三折半六率

一起於五分如四乘三角堆積數之爲一者則七分根爲二九分根爲三弦起於弧之一分而四乘三角堆根

則起於弧之五分爲四乘三角堆之根以根與根加一

故當減三折半相乘與根加二再乘與根加三三乘與根加四四乘得

數又以根減一與根相乘與根加一再乘與根加二三
 乘與根加三四乘得數兩數相并爲兩帶縱四乘方積
 二除之三除之四除之五除之爲兩四乘三角堆積迺
 得六率以此遞推皆置弧分以一二三四諸數遞減折
 半爲根以根與根減一如諸乘方三角堆以根求積遞
 乘遞除術求得兩三角堆積並得諸率然取數過繁故
 復以方錯積變之別立爲簡法也

弦矢連比例諸率成方錐堆圖

	三率	四率	五率	六率	七率	八率
四 四分	一 二分	一 三分	一 四分	一 五分	一 六分	一 七分
五 五分						
六 六分						
七 七分						
八 八分						
九 九分						

九六分

一四七分

二八分

七九分

三五十分

四十分

一六八分

三九分

五十分

七十一分

一二十二分

一五十三分

二五十分

五十一分

一五十二分

二十三分

二九四分

四十五分

三六十二分

九十三分

一九六分

三十五分

六七十分

二三十七分

四九十四分

一四十五分

三六十六分

七十四分

一三六十八分

二五十八分

六四十六分

二四十七分

五四十八分

二九十九分

三六十分

五四十二分

八一十八分

二五十九分

八五十分

二九十分

四七五分

九六七分

一〇二分

三八十二分

二二二分

三八九三分

八〇八四分

一七五五分

二二二分

五六三分

二七六四分

五〇五分

一三〇三分

三〇八七分

一四四四分

六五五分

二二六六分

七二七分

二〇三四八分

五三七九分

一六九六分

八九七分

三二八八分

〇五九分

三九十分

八三三十分

一九六八分

一五九分

四二〇分

二四三十分

四五六三十分

二九〇八十分

平方錐堆積即立方錐堆積即三乘方錐堆積即四乘方錐堆積即五乘方錐堆積即六乘方錐堆積即七
方錐堆積每層數一乘方錐堆每層數二乘方錐堆每層數三乘方錐堆每層數四乘方錐堆每層數五乘方錐堆每層數六乘方錐堆每層數七

如圖舉八率以上爲例分爲六列第一列一四九十六

上圖兩平三角堆相并之數卽平方錐堆積如斜置平

方形第一層爲一第二層爲三第三層爲五故根一者爲積一根二者并一層一二層三爲四根三者并一層

一二層三三層五爲九亦卽立方錐堆每層之數也立方錐堆第一

二層爲四第二列一五十四三十三上圖兩立三角堆三層爲九

相并之數卽立方錐堆積立方錐堆根一者爲積一根二者并一層一二層四爲五

根三者并一層一二層四三層九爲十四亦卽三乘方錐堆每層之數也五

率以下並同一例至成數十百乘方錐堆積在前圖爲

兩三角堆形相并之積在此則爲方錐堆之積其根數

與上所求三角形之根相同其積數卽弦矢諸率之率

數凡求方錐堆積皆以倍根數乘根數爲帶縱平方積
二除之得平方錐堆積以根數與根數加一相乘倍根
數加一再乘爲帶縱立方積二除之三除之得立方錐
堆積以根數與根數加一相乘根數加二再乘倍根數
加二三乘爲帶縱三乘方積二除之三除之四除之得
三乘方錐堆積以根數與根數加一相乘根數加二再
乘根數加三三乘倍根數加三四乘爲帶縱四乘方積
二除之三除之四除之五除之得四乘方錐堆積乘除
數皆遞進一與三角堆同惟倍根數亦遞加一爲異此
亦堆塚術之定法也

用倍根加一則倍於根數加半相乘故惟用三除此

舊法惟有立方錐堆求積術其術以根數加半相乘故惟用三除此

凡求弦求矢皆

由二率以求諸率而倍根遞加數又恆與弧分等即恆

與二率等

如三率則以倍根數相乘而根數即由弧分折半而得是弧分即倍根四率本以倍根數

加一相乘而根數即由弧分減一折半所得是弧分即倍根加一以此遞推則弧分與倍根遞加數常相等

則設有二率以求諸率者弧分二率折半爲根以乘弧

分二率

即倍根

得帶縱平方積二除之得平方錐堆積即

爲三率復以弧分減一折半爲根以根與根加一相乘

以乘弧分二率

即倍根加一

爲帶縱立方積二除之三除之

得立方錐堆積即爲四率復以弧分減二折半爲根以

根與根加二相乘以乘三率爲帶縱立方積三除之四

除之得三乘方錐堆積即爲五率

凡二率與四率三率與五率根皆遞降以

一本當以根與根加一相乘根加二再乘倍根加二三乘爲帶縱三乘方積二除之三除之四除之得三乘方

錐堆積而所得之三率本爲根乘倍根二除之數則
在三率爲根者在五率爲根加一在三率爲倍根者在
五率爲倍根加二以三率求五率是已有根加一倍根
加二諸乘數又有二爲除數故惟以五率之根與根加
二相乘又以三率乘之變爲帶縱以弧分減三折半爲
立方積而除數亦少一二除也

根以根與根加三相乘以乘四率爲帶縱立方積四除

之五除之得四乘方錐堆積卽爲六率

本當以根與根加一相乘根加

二再乘根加三三乘倍根加三四乘爲帶縱四乘方積
二除之三除之四除之五除之得四乘方錐堆積而所
得之四率本爲根與根加一相乘倍根加一再乘二除
之三除之之數則在四率爲根者在六率爲根加一在
四率爲根加一者在六率爲根加二在四率爲倍根加
一者在六率爲倍根加三以四率求六率是已有根加
一根加二倍根加三諸乘數又有二除三除數故惟以
六率之根與根加三相乘又以四率乘之變爲帶縱立
方積而除數亦少一二除又少一三

以弧分減四折半

爲根以根與根加四相乘以乘五率爲帶縱立方積五

除之六除之得五乘方錐堆積卽爲七率以弧分減五折半爲根以根與根加五相乘以乘六率爲帶縱立方積六除之七除之得六乘方錐堆積卽爲八率以弧分減六折半爲根以根與根加六相乘以乘七率爲帶縱立方積七除之八除之得七乘方錐堆積卽爲九率以弧分減七折半爲根以根與根加七相乘以乘八率爲帶縱立方積八除之九除之得八乘方錐堆積卽爲十率以此遞推而億萬率法皆一貫諸率之根旣以弧分減一二三四諸數折半爲根其所減之數又常與乘數內根所加之數等

四率減一面乘數亦爲根加一五率減二面乘數亦爲根加二以下並同

則四率以下

本以弧分減一折半爲根其立方面羈爲根乘根加一
之羈則根爲廣根加一爲長其長廣和爲倍根加一與
弧分等五率本以弧分減二折半爲根其立方面羈爲
根乘根加二之羈則根爲廣根加二爲長其長廣和爲
倍根加二亦與弧分等以下並同 凡以長廣和爲正方減去較方羈恆
爲原方羈之四倍又兩立方體同高者其面羈之比例
卽如體積之比例此又通弧求弦矢各加一四除之理
所從出也

凡求三率所得之帶縱平方積以根數爲廣倍根數爲

長如以諸率相連之理例之則亦可以一率爲高與弧
成立方積蓋一率常爲一故立積亦如平積也與弧

分自乘平方積如一與二故置弧分自乘爲平方積二

除之得帶縱平方積又二除之得平方錐堆積卽爲三

率然諸數皆用倍矢此求矢本數當更以二除之方爲

三率故於弧分自乘二除之數易爲四除也

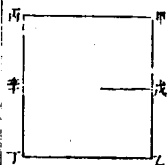
倍矢與矢本數在三

率增一二除則五率以降皆當增一二除然求五率時

所用之三率卽矢本數已有二除在內故不復易四除

爲八除七率

以下並司



如圖甲乙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形甲戊

爲甲乙之半卽根數

本以弧分減半爲根故甲戊得甲乙之半

甲丙爲倍根

數以甲戊爲廣甲丙爲長成甲戊丙辛帶縱正方形

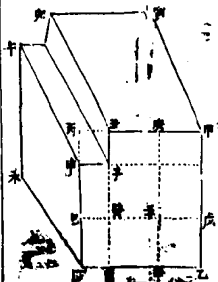
以本

根與倍根相乘爲帶縱平方積

甲乙旣爲弧分甲戊旣爲弧分之半則

必爲弧分自乘甲乙丙丁平方積二之一矣

凡求四率所得之帶縱立方積以根數爲廣根數加二
爲長二率爲高與弧分自乘減一爲面冪二率爲高之
磬折立方積爲一與四故置弧分自乘減一爲磬折面
冪以二率乘之爲磬折立方積四除之得帶縱立方積
又二除之三除之得立方錐堆積卽爲四率



如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形丑子

丙申小方隅積一其邊丑丙亦爲一庚丑爲甲丑之半

卽根數本以弧分減一折半爲根數故庚壬爲根加一

以庚丑爲廣庚壬爲長二率爲高成帶縱立方積本以

根加一相乘倍根加一卽其面冪爲庚壬丑癸帶縱平

二率再乘爲帶縱立方積

方形爲甲乙丑子申丁磬折形面冪四之一甲乙丙丁

去丑子丙申隅積一卽成甲乙丑子申丁磬折形移子

癸申己形補戊乙壬辛形卽與庚壬丑癸形等而甲戊

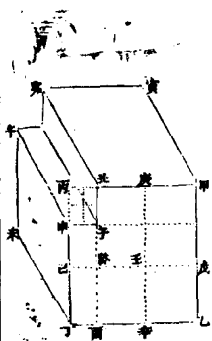
庚壬形己壬丁辛形皆與庚若同以甲寅二率爲高成

壬丑癸形相等故爲四之一寅甲乙丁未午申子丑卯磬折方形則兩立積相較

亦爲四之一矣

凡求五率所得之帶縱立方積以根數爲廣根數加二

爲長三率爲高與弧分自乘減四爲面冪三率爲高之
磬折立方積爲一與四故置弧分自乘減四爲磬折面
冪以三率乘之爲磬折立方積四除之爲帶縱立方積
又三除之四除之得三乘方錐堆積卽爲五率



如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形丑子
丙申小方隅積四其邊丑丙二庚丑爲甲丑之半卽根

數

甲本以弧分減二折半爲根數故
丙減五丙折半於庚爲庚丑

庚壬爲根加二以庚

丑爲廣庚壬爲長三率爲高成帶縱立方積

本以根與根加二相

乘以三率再乘爲帶縱立方積

其面冪爲庚壬丑癸帶縱平方形爲甲

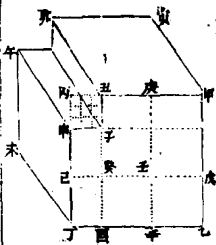
乙丑子申丁磬折形面冪四之一

移積之理並與前同

若同以甲

寅三率爲高則成寅甲乙丁未午申子丑卯磬折立方形兩立積相較亦爲四之一矣

凡求六率所得之帶縱立方積以根數爲廣根數加三爲長四率爲高與弧分自乘減九爲面冪四率爲高之磬折立方積爲一與四故置弧分自乘減九爲磬折面冪以四率乘之爲磬折立方積四除之得帶縱立方積又四除之五除之得四乘方錐堆積卽爲六率



如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形丑子

丙申小方隅積九其邊丑丙爲三庚丑爲甲丙之半卽

根數

本以弧分減三折半爲根數故
甲丙減丑丙折半於庚爲庚丑

庚壬爲根加三以

庚丑爲廣庚壬爲長四率爲高成帶縱立方積

本以根
與根加

三相乘以四率再
乘爲帶縱立方積

其面冪爲庚壬丑癸帶縱平方形爲

甲乙丑子申丁磬折形面冪四之一若同以甲寅四率

爲高則成寅甲乙丁未午申子丑卯磬折立方形兩立積相較亦爲四之一矣

七率以下數遞進而按位乘除則無異可以類推不復圖解則凡有通弧以求弦矢諸率卽以通弧作弧分爲二率其求弦率者弧分自乘減一二率乘之四除之又二除之三除之爲四率弧分自乘減九四率乘之四除之又四除之五除之爲六率弧分自乘減二十五六率乘之四除之又六除之七除之爲八率弧分自乘減四十九八率乘之四除之又八除之九除之爲十率以次遞求其減數皆奇數按位自乘數其求矢率者弧分自乘四除之又二除之爲三率弧分自乘減四三率乘之

四除之又三除之四除之爲五率弧分自乘減十六五
率乘之四除之又五除之六除之爲七率弧分自乘減
三十六七率乘之四除之又七除之八除之爲九率亦
以次遞求其減數皆耦數按位自乘數然所得諸數皆
諸率之約分若求真數當遞以一率除之而其位遞降
因一率常爲一故諸率位降而數不改又通弧求弦矢卽以通弧數作弧
分數則自乘後減數至微卽一四九十六諸數可不入算故直以
通弧爲二率二率自乘爲三率卽如弧分自乘下求諸
率並以三率乘之不復遞減也弦矢互求諸術則必以減數立算方爲密合又
弧求弦弧分當用奇數然其差亦微故奇耦通用至弦求弦則仍當用奇數也既得諸率按間
位多少之數加減之卽爲通弦之全數弧背求正弦正

矢則弦矢之比例悉同

通弦與弧背既同用一矢而正弦得通弦之半半與半如全與

全故比例皆等

而弧背自乘積與通弧自乘積常爲四之一

一

一倍則積加四倍

以求諸率當加一四乘今不復加而諸率內

並省一四除則與四乘無異矣古法名通弧爲弧背通弦爲弦弧背爲半弧背正弦爲半弧弦今並仍杜氏原文無所更易至弦矢求弧則卽弧求弦矢之還原如堆垛術變積求之則成一例也

聖朝列傳卷之四

割圖連比例術圖解卷下

董方立遺書一

陽湖董祐誠

弦求弧連比例諸率遞降圖

通弦節第一數	第二數	第三數	第四數
八率	多 ^三 一 ^之	少 ^{又九} 一 ^{除實少}	一 ^{又三} 一 ^之
六率	少一	一	
四率	少一		
二率	三		

如圖舉三分通弦八率以上爲例爲通弦求弧諸率之所自出三分通弦爲二率三少四率一今求二率三之全數弧分數位同於二率數析則以通弦爲第一數數分愈密則二率卽弧分矣

丙少一四率應加一四率適卽以通弦二率三少四率
一爲二率二率自乘一率除之爲三率九少五率六多
七率一卽爲三率通弦二率三少四率一爲二率乘之
一率除之爲四率二十七少六率二十七多八率九少
十率一圖止八首位四率二十七與應加之四率一爲
二十七與一卽以一乘之二十七除之約爲四率一少
六率一多八率三之一少十率二十七之一爲第二數
以之相加則前少之四率已加足而次位尙少六率一
適復置第二數以三率九少五率六多七率一爲三率
乘之一率除之爲六率九少八率十五多十率十少十
二率三又三之一多十四率九之五十四率以下不具列首位之

六率九與應加之六率一爲九與一卽以一乘之九除
之約爲六率一少八率一又九之六多十率一又九之
一少十二率二十七之十多十四率八十一之五爲第
三數復以相加則前少之六率一已加足尙少八率一
又九之六除前第二數內所多八率三之一實少八率
一又三之一當更加八率一又三之一如是屢求至於
無盡是以三分通弦爲二率以求諸率應卽通弦本數
加四率一又加六率一又加八率一又三之一十率以下其數
無盡今而得二率三之全數與弧分等也五分以下皆
不具列依法遞求亦以遞加之差齊之而比例生矣

弦求弧連比例諸率圖

弧分二率

四率加

六率加

八率加

一

一

一

一

一
三

三

三

一

一

一
三

五

五

五

一四

五二

七

七

一四

七七

五六一

九

九

三〇

二七三

三三八九

一一

一一

五五

七四八

一三四六四

如圖舉八率以上爲例爲通弦求弧之相連比例率數
矢求弧連比例諸率遞降圖

倍矢卽第一數第二數

第三數

第四數

九率

多
十六

少

八之除去實少十六
三、十六之五之五

七率	少	一	二
五率	少	一	一
三率	四		

如圖舉四分之矢九率以上爲例爲矢求通弧諸率之所自出矢首位三率雖同而實數則少當遞求諸率以相加而得三率之全數四分之倍矢爲三率四少五率一卽用爲三率如法以求諸率

法與前所列三分通弦同惟用數互異不復贅

列是以四分之倍矢爲三率以求諸率應卽倍矢本數加五率一又加七率二之一又加九率十六之五十一率以下數亦而得以半弧分爲二率所求之三率也六分以下亦依次遞求並以遞加之差齊之而比例生矣

無盡

下數亦

而得以半弧分爲二率所求之三率也六分以下亦依次遞求並以遞加之差齊之而比例生矣

矢求弧連比例諸率圖

二	四	六	八	一〇
一	四	九	一六	二五
一	一	六	二〇	五〇
一	一	七	四二	一六五
一	一	一	一〇七	六六〇
	<small>一六 之五</small>		<small>又四 之一</small>	

如圖舉九率以上爲例爲矢求通弧之諸率如上既得諸率當求其遞增之差立爲通術圖中弦之二率四率矢之三率五率皆與弧求弦矢數等故術亦同六率以降率數驟增而弦自三分矢自四分以下諸率卽無盡

數仍以弧求弦矢術變之得其差數始可立爲通術也

凡弦求弧如前通弧求弦四率六率相求術以六率四

乘之五乘之卽成帶縱立方積以四率爲高弧分減三

折半爲廣又加三爲長前詳解圖若以弦求弧之六率四乘

之五乘之亦成帶縱立方積亦以四率爲高而廣則如

弧分三乘減一折半長則如弧分三乘減一折半又加

一弧求弦之帶縱立方積其高爲四率以除帶縱立方積卽得長廣相乘之五分廣爲一長爲四其四

七分廣爲二長爲五其十其廣起五分爲一五分以

下弧分皆遞增二廣長數皆遞增一故以弧分減三折

半爲廣加三爲長求弧之帶縱立方積其高亦爲四

率而六率既不同則體積變而面亦變若亦以四率

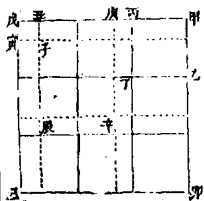
爲高除帶縱立方積則三分爲二十廣如四長如五

五分爲五十六廣如七長如八七分爲一百十廣

如十長如十一其廣起三分爲四三分以下弧分皆遞

增二廣數皆遞增三其長皆較廣多一則亦遞增三故

以弧分三乘減一拆半則得廣廣恆加一得長則以此長廣相乘爲帶縱平方
 冪四率乘之爲帶縱立方積四除之五除之可得六率
 而所有之帶縱立方積爲弧分自乘又九乘減一四率
 乘之所成磬折立方積四之一故置弧分自乘又九乘
 之減一爲磬折冪四率乘之得磬折立方積四除之爲
 帶縱立方積又四除之五除之卽得六率



如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形甲戊爲三倍弧分甲卯戊己爲三倍弧分自乘正方形卽甲乙丙丁方形之九倍丑子戊寅小方隅積一其邊丑戊亦一以甲戊減戊丑折半於庚庚丑爲三倍弧分減一折半之數庚辛爲三倍弧分減一折半又加一之數庚辛同庚戊辛丑辰帶縱平方冪爲甲卯丑子寅己磬折冪四之一若同以四率爲高則立積亦爲四之一矣移積之理

同前不復詳釋

如前六率八率相求術以八率六乘之七乘之卽成帶縱立方積以六率爲高弧分減五折半爲廣又加五爲長若以弦求弧之八率六乘之七乘之亦成帶縱立方

積亦以六率爲高而廣則如弧分五乘減一折半長則

如弧分五乘減一折半又加一

弧求弦之帶縱立方積其高爲弧求弦之六率

以除帶縱立方積則得長廣相乘之算七分廣一長六其算六九分廣二長七其算十四其廣起七分爲一七分以下弧分皆遞增二廣長數皆遞增一故以弧分減五折半爲廣加五爲長弦求弧之帶縱立方積以茲求弧之六率爲高以除帶縱立方積則三分算爲五十六廣如七長如八五分算爲一百五十六廣如十二長如十三七分算爲三百有六廣如十七長如十八其廣起三分爲七三分以下弧分皆遞增二廣數皆遞增五其長較廣亦多一則亦遞增五故以弧分五乘減一折半爲廣廣恒加一爲長以此類推則十率以弧分七乘減一折半爲廣加一爲長十二率以弧分九乘減一折半爲廣加一爲長法皆一貫

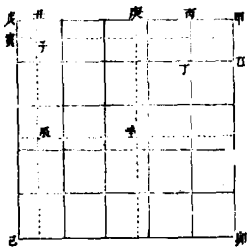
則以此長廣

相乘爲帶縱平方算六率乘之爲帶縱立方積六除之

七除之可得八率而所有之帶縱立方積爲弧分自乘

又二十五乘減一六率乘之所成磬折立方積四之一

故置弧分自乘又二十五乘之減一爲磬折冪六率乘之爲磬折立方積四除之得帶縱立方積又六除之七除之卽得八率



如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形甲戊爲五倍弧分甲卯戊己爲五倍弧分自乘正方形卽甲

乙丙丁方形之二十五倍丑子戊寅小方隅積一其邊
丑戊亦一以甲戌減戊丑折半於庚庚丑爲五倍弧分
減一折半之數庚辛爲五倍弧分減一折半又加一之

數

庚辛同
庚戌

庚辛丑辰帶縱平方冪爲甲卯丑子寅己磬

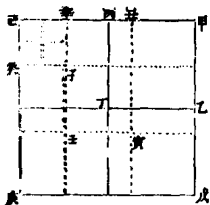
折冪四之一若同以六率爲高則立積亦爲四之一矣
十率以下數遞進而按位乘除則無異則十率以七倍
弧分減一折半爲廣加一爲長之面冪與四十九倍弧
分自乘方又減一之磬折冪十二率以九倍弧分減一
折半爲廣加一爲長之面冪與八十一倍弧分自乘方
又減一之磬折冪皆爲四之一至億萬率無不相同故
以通弦數作弧分爲二率弧分自乘減一二率乘之四

除之又二除之三除之爲四率弧分自乘九乘之減一
四率乘之四除之又四除之五除之爲六率弧分自乘
二十五乘之減一六率乘之四除之又六除之七除之
爲八率以此遞求其乘數皆奇數按位自乘數其減數
皆一而除數則與弧求弦同其一率遞除降位及直以
弧分自乘之三率乘之不復減一其理亦同旣得諸率
以之相加卽得二率全數而二率全數卽弧分全數故
卽爲通弧之數正弦求弧背則比例固同而以正弦作
弧分其自乘積與通弦作弧分自乘之積亦爲一與四
通弦加正
弦一倍以求諸率當加一四乘今不復加亦以少一
四除代之至圍徑求周圍內六分之一通弦常與半徑

等則以半徑爲通弦如通弦法求得通弧六倍之卽圓周故先以三乘全徑卽如六乘半徑以求通弧則徑大六倍弧亦大六倍卽如六倍通弧之數蓋連比例二率與一率同則諸率皆同今通弦二率旣如半徑一率則凡二率自乘一率除及三率乘一率除者皆可不用乘除矣

凡矢求弧如前通弧求矢五率七率相求術以七率五乘之六乘之卽成帶縱立方積以五率爲高弧分減四折半爲廣又加四爲長若以矢求弧之七率五乘之六乘之亦成帶縱立方積亦以五率爲高而廣則如弧分二乘減二折半長則如弧分二乘減二折半又加二求弧

矢之帶縱立方積其高爲五率以除帶縱立方積則得
長廣相乘之率六分廣爲一長爲五其率五八分廣爲
二長爲六其率十二其廣起六分爲一六分以下弧分
皆遞增二廣長數皆遞增一故以弧分減四折半爲廣
加四爲長矢求弧之帶縱立方積其高亦爲五率而七
率既不同則體積變而面亦變若以五率爲高除帶
縱立方積則四分爲五長如七八分爲六十三廣如七長如
三十五廣如五長如七八分爲六十三廣如七長如
九其廣起四分爲三四分以下弧分皆遞增二廣數亦
遞增二其長皆較廣多二則亦遞增二故以弧分二乘
減二折半得廣廣則以此長廣相乘爲帶縱平方率五
倍加二得長也 率乘之爲帶縱立方積五除之六除之可得七率而所
有之帶縱立方積爲弧分自乘又四乘減四五率乘之
所成磬折立方積四之一故置弧分自乘又四乘之減
四爲磬折率五率乘之爲磬折立方積四除之爲帶縱
立方積又五除之六除之卽得七率



如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形甲己
爲二倍弧分甲戊己庚爲二倍弧分自乘正方形卽甲
乙丙丁方形之四倍辛壬癸小方隅積四其邊辛己
爲二以甲己減辛己折半於丑丑辛爲二倍弧分減二
折半之數丑寅爲二倍弧分減二折半又加二之數寅丑
同丑丑寅辛壬帶縱平方算爲甲戊辛壬癸庚磬折算

四之一若同以五率爲高則立積亦爲四之一矣

如前七率九率相求術以九率七乘之八乘之卽成帶

縱立方積以七率爲高弧分減六折半爲廣又加六爲

長若以矢求弦之九率七乘之八乘之亦成帶縱立方

積亦以七率爲高而廣則如弧分三乘減二折半長則

如弧分三乘減二折半又加二弧求矢之帶縱立方積其高爲弧求矢之七率

以除帶縱立方積則得長廣相乘之其高爲弧求矢之七率

其帶縱立方積則得長廣相乘之其高爲弧求矢之七率

分以下弧分皆遞增二廣長數皆遞增一故以弧分減

六折半爲廣加六爲長矢求弧之帶縱平方積其高爲

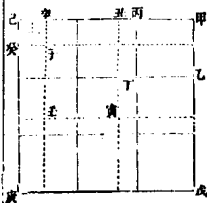
矢求弧之七率以除帶縱立方積則四分爲三十五

廣如五長如七六分爲八十分廣如八長如十八分爲

爲一百四十三廣如十一長如十三其廣起四分爲五

四分以下弧分皆遞增二廣數皆遞增三其長較廣亦

爲廣加二爲長十三率以弧分五則以此長廣相乘爲
 乘減二爲廣加二爲長法亦一貫
 帶縱平方幕七率乘之爲帶縱立方積七除之八除之
 可得九率而所有之帶縱立方積爲弧分自乘又九乘
 減四七率乘之所成磬折立方積四之一故置弧分自
 乘又九乘之減四爲磬折幕七率乘之爲磬折立方積
 四除之爲帶縱立方積又七除之八除之卽得九率



如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形甲己爲三倍弧分甲戊己庚爲三倍弧分自乘正方形卽甲乙丙丁方形之九倍辛子己癸小方隅積四其邊辛己爲二以甲己減辛己折半於丑爲三倍弧分減二折半之數丑寅爲三倍弧分減二折半又加二之數丑寅同丑寅辛壬帶縱平方幕爲甲戊辛子癸庚磬折幕四之一若同以七率爲高則立積亦爲四之一矣

十一率以下數遞進而按位乘除則無異則十一率以四倍弧分減二折半爲廣加二爲長之面幕與十六倍弧分自乘方又減四之磬折幕十三率以五倍弧分減二折半爲廣加二爲長之面幕與二十五倍弧分自乘

方又減四之磬折幕皆爲四之一至億萬率無不相同

故以八乘矢爲三率卽爲弧分自乘數

弦求弧通弦之二率本與弧分

同故卽以通弦自乘爲弧分自乘以求諸率矢求弧則本無弧分數而弧求矢衡本以弧分自乘四除二除卽八除爲三率則卽用八乘矢爲弧分自乘數以求諸率也

置弧分自乘數減四三

率乘之四除之又三除之四除之爲五率置弧分自乘

數四乘之減四五率乘之四除之又五除之六除之爲

七率置弧分自乘數九乘之減四七率乘之四除之又

七除之八除之爲九率以此遞求其乘數皆遞加自乘

數其減數皆爲四而除數則與弧求矢同其一率遞除

降位及直以三率乘之不復減四其理亦同旣得諸率

以之相加卽得三率全數弧分旣同二率則以一率乘

三率開方而得二率卽爲通弧之數正矢求弧背則比

例固同而所用二乘矢數迺弧背作弧分自乘數與通

弧作弧分自乘數亦爲一與四

弧背求矢本以弧背自乘二除爲矢三率則二

乘矢卽如弧背自乘數通弧加弧背一倍則積亦四倍

以求諸率當加一四乘今

不復加而亦各以少一四除代之也如以前乘除降位

之理釋之則弦求弧所用之弦卽弧求弦所得諸率爲

二率幾少四率幾多六率幾

舉以見例故不及八率以下諸率

卽爲第

二率亦卽爲第一數如求六率當以第一數內之二率

自乘爲第三率內之三率第一數內之二率乘第一數

內之四率二乘之爲第三率內所少之五率

本以第一數二率幾

少四率幾自乘則二率乘二率爲三率卽如二率自乘二率乘四率四率乘二率兩數相并爲五率卽如二率

乘四率二乘之互
乘之理可以類推
又以第一數乘之則二率自乘再乘

爲第四率內之四率二率自乘乘第一數內四率三乘

之
此用同乘法故
以三乘併之
爲第四率內所少之六率各以第一

數內之四率乘之第一數內之二率自乘再乘除之則

第一數內所少之四率卽第二數內所有之四率第一

數內四率自乘三乘之二率除之爲第二數內所少之

六率當以第一數內所多之六率減之方爲弦求弧應

加之六率而第一數內諸率皆出於二率如以二率齊

之則置二率自乘減一二率乘之又以二率自乘減一

乘之又三乘之四除之二除之三除之又四除之二除

之三除之
本以第一數內之四率自乘三乘之二率除
之爲第二數內所少之六率而求第一數內

之四率本以二率自乘減一又以二率乘之四除之二
除之三除之得四率今卽以二率爲用如求四率法乘
除之又本當以二率除今於二率自乘卽第二數內所
減一下省一二率乘以代之餘可類推卽第二數內所
少之六率復以二率自乘減一二率乘之又以二率自
乘減九乘之四除之二除之三除之又四除之又四除
之五除之此卽弧求弦
六率之法卽第一數內六率法當相減今
以兩數俱爲立方積則一以二率爲廣二率自乘數少
一爲高三倍二率自乘數少三爲長一以二率爲廣二
率自乘數少一爲高二率自乘數少九爲長兩形高廣
既同則以長數相減爲長以原高廣爲立方形必與兩
體積相減等然兩積之中除數各異當更變其長使除
數相同而後可通爲一以先減而後除故置前形之長

三倍二率自乘數少三以除數相異之四與五迭乘之
二與三迭除之得十倍二率自乘數少十爲長以後形
之長二率自乘數少九減之得九倍二率自乘數少一
爲長仍以二率爲廣二率自乘數少一爲高以此立方
積四除之二除之三除之又四除之又四除之五除之
卽爲弦求弧應加之六率而二率爲廣二率自乘數少
一爲高相乘之高廣冪四除之二除之三除之卽第二
數內之四率則用四率之數卽如用高廣相乘四除之
二除之三除之之數故惟以二率自乘九乘減一四率
乘之四除之又四除之五除之而得應加之六率也矢
求弧所用之矢卽弧求矢所得諸率爲三率幾少五率

幾多七率幾卽爲第三率亦卽爲第一數如求七率當以第一數內之三率自乘爲第五率內之五率第一數內之三率乘第一數內之五率二乘之爲第五率內所少之七率各以第一數內之五率乘之三率自乘除之則第一數內所少之五率卽第二數內所有之五率第一數內五率自乘二乘之三率除之爲第二數內所少之七率當以第一數內所多之七率減之方爲矢求弧應加之七率而第一數內諸率皆出於三率而三率又爲二率自乘八除之數如亦以二率齊之則置二率自乘以二率自乘減四乘之又以二率自乘減四乘之又二乘之四除之二除之又四除之三除之四除之又四

除之三除之四除之卽第二數內所少之七率復以二
率自乘以二率自乘減四乘之又以二率自乘減十六
乘之四除之二除之又四除之三除之四除之又四除
之五除之六除之卽第一數內七率亦當相減今以兩
數亦爲立方積則一以二率自乘數爲廣二率自乘數
少四爲高二倍二率自乘數少八爲長一以二率自乘
數爲廣二率自乘數少四爲高二率自乘數少十六爲
長其高廣旣同而除數亦異亦變其長使除數相同故
置前形之長二倍二率自乘數少八以除數相異之五
與六迭乘之三與四迭除之得五倍二率自乘數少二
十爲長以後形之長二率自乘數少十六減之得四倍

二率自乘數少四爲長仍以二率自乘數爲廣二率自
乘數少四爲高以此立方積四除之二除之又四除之
三除之四除之又四除之五除之六除之卽爲矢求弦
應加之七率而二率自乘數爲廣二率自乘數少四爲
高相乘之高廣冪四除之二除之又四除之三除之四
除之卽第二數內之五率則用五率之數卽如用高廣
相乘四除之二除之又四除之三除之四除之之數故
惟以二率自乘四乘減四五率乘之四除之五除之六
除之而得應加之七率也

諸數雖異其
理與弦悉同

其弦自八率以

降矢自九率以降取數雖繁而以省乘省除通之以同
乘同除合之以異乘同除齊其除數以同乘異除齊其

乘數則弦自九倍二十五倍四十九倍至億萬倍矢自
四倍九倍十六倍至億萬倍弦之減數皆爲一矢之減
數皆爲四以次遞求無不密合蓋於至繁之中得至簡
之用爲弧求弦矢之還原皆天地自然之數無所勉強
割圓之能事畢矣

割圓解既成之二年朱先生復得割圓密率捷法四卷於鍾祥李氏蓋乾隆初欽天監監正明圖所解而門人陳際新所續成者其書釋連比例諸率分弦矢爲二術皆先設百分千分萬分諸弧如本法乘除之棄其畸零以求合於矢之十二三十五十六弦之二十四八十六十八諸數遂謂遞加一數以爲除法者特取其易知而便於記憶則其於立法之原似未盡也然反覆推衍使弧矢奇耦率可互通鉤隱探賾雜而不越蓋師弟相承積三十餘年之久推其用心可謂勤且深矣陳氏序言圖徑求周及弧求弦矢三術爲杜德美氏所作餘六術則明圖氏補之與張先生所傳互異又借弧借弦二

術並見陳氏書中范氏所作其闡合歟余以棊積釋比
例而三角及方錐堆三乘以下舊無其術近讀元朱世
傑四元玉鑑菱草形段果棊疊藏諸問乃知遞乘遞除
之術近古所有而遠西之士尙能守其遺法有足珍者
爰并記之道光建元六月朔日董祐誠